

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования «Саратовский государственный
технический
университет имени Гагарина Ю.А.»

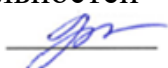
Профессионально-педагогический колледж



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

по дисциплине
ОП.01 «Математические методы решения прикладных профессиональных
задач»

направление подготовки
21.02.19 «Землеустройство»

Методические указания рассмотрены
на заседании цикловой методической комиссии
технических специальностей
Председатель ЦМК  Е.Э.Воеводина

Пояснительная записка

Методические указания по выполнению практических работ подготовлены на основе рабочей программы учебной дисциплины ОП.01 «Математические методы решения прикладных профессиональных задач», разработанной на основе ФГОС СПО по специальности 21.02.19 «Землеустройство», соответствующих общих (ОК) и профессиональных (ПК) компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях.

ПК 1.1. Выполнять полевые геодезические работы на производственном участке

ПК 1.2. Выполнять топографические съемки различных масштабов.

ПК 1.3. Выполнять графические работы по составлению картографических материалов

ПК 1.4. Выполнять кадастровые съемки и кадастровые работы по формированию земельных участков

ПК 1.5. Выполнять дешифрирование аэро- и космических снимков для получения информации об объектах недвижимости.

ПК 1.6. Применять аппаратно-программные средства для расчетов и составления топографических, межевых планов

ПК 2.1. Проводить техническую инвентаризацию объектов недвижимости

ПК 2.2. Выполнять градостроительную оценку территории поселения

ПК 2.3. Составлять технический план объектов капитального строительства с применением аппаратно-программных средств

ПК 2.4. Вносить данные в реестры информационных систем различного назначения

ПК 3.1. Консультировать по вопросам регистрации прав на объекты недвижимости, и предоставления сведений, содержащихся в Едином государственном реестре недвижимости (ЕГРН)

ПК 3.2. Осуществлять документационное сопровождение в сфере кадастрового учета и (или) государственной регистрации прав на объекты недвижимости

ПК 3.3. Использовать информационную систему, предназначенную для ведения ЕГРН

ПК 3.4. Осуществлять сбор, систематизация и накопление информации, необходимой для определения кадастровой стоимости объектов недвижимости

ПК 4.1. Проводить проверки и обследования для обеспечения соблюдения требований законодательства Российской Федерации

ПК 4.2. Проводить количественный и качественный учет земель, принимать участие в их инвентаризации и мониторинге

ПК 4.3. Осуществлять контроль использования и охраны земельных ресурсов

ПК 4.4. Разрабатывать природоохранные мероприятия

При выполнении практических работ студент должен **знать**:

- значение математики в профессиональной деятельности;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;

- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;

- основы интегрального и дифференциального исчисления

При выполнении практических работ студент должен **уметь**:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Содержание практических занятий определено рабочей программой и тематическим планированием, соответствует теоретическому материалу изучаемых разделов учебной дисциплины.

Объем практических занятий по дисциплине определяется учебным планом по данной специальности.

Продолжительность практического занятия – 2 академических часа. Перед проведением практического занятия преподавателем организуется инструктаж, а по его окончании – обсуждение итогов.

Комплект методических указаний по выполнению практических работ по дисциплине ОП.01 «Математические методы решения прикладных профессиональных задач» содержит 24 практических занятия.

**Перечень практических работ
по дисциплине ОП.01 «Математические методы решения прикладных
профессиональных задач»**

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Тема: Действия над матрицами

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Тема: Действия над матрицами

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Тема: Решение систем уравнений методами Крамера, Гаусса, методом обратной матрицы

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Тема: Решение систем уравнений методами Крамера, Гаусса, методом обратной матрицы

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

Тема: Решение систем уравнений методами Крамера, Гаусса, методом обратной матрицы

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Тема: Векторы и прямая на плоскости.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

Тема: Векторы и прямая на плоскости.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

Тема: Задачи на составление уравнений и построение прямых и плоскостей

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

Тема: Задачи на составление уравнений и построение прямых и плоскостей

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10

Тема: Действия с комплексными числами, записанными в различных формах.
Решение уравнений

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11

Тема: Действия с комплексными числами, записанными в различных формах.
Решение уравнений

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12

Тема: Раскрытие неопределенностей

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13

Тема: Раскрытие неопределенностей

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14

Тема: Вычисление производных, исследование функции

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15

Тема: Вычисление производных, исследование функции

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16

Тема: Вычисление приближенных значений функции. Оценка погрешности

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 17

Тема: Вычисление приближенных значений функции. Оценка погрешности

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 18

Тема: Приложения определенного интеграла

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 19

Тема: Приложения определенного интеграла

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 20

Тема: Приложения определенного интеграла

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 21

Тема: Вычисление вероятностей случайных событий

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 22

Тема: Вычисление вероятностей случайных событий

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 23

Тема: Анализ, обработка и графическое представление данных

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 24

Тема: Анализ, обработка и графическое представление данных

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Тема: Действия над матрицами

Цель работы: сформировать навыки выполнения операций над матрицами: сложение, вычитание, умножение матрицы на число, произведение матриц.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

1. Умножение матрицы на число – для того чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент матрицы умножить на это число.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Сумма (разность) матриц – для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были одинаковыми по размеру.

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 0+5 \\ 7+1 & 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Для разности матриц правило аналогичное, необходимо найти разность соответствующих элементов.

3. Умножение матриц – чтобы матрицу можно было умножить на матрицу нужно, чтобы число столбцов матрицы равнялось числу строк матрицы.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 3 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Содержание работы:

Задание 1. Найти $A+B$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Дано:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & -1 \\ 6 & 3 & 0 & 11 \\ 7 & 8 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Найти: $-3A$.

Задание 3. Для заданных матриц A, B, C найти матрицы $3A+2B, AB, BA, AB+C, BA-4C$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Задание 4. Найти матрицу X , если:

$$a) 2 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 8 \\ -3 & 9 \end{pmatrix};$$

$$б) 3X + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 13 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 13 & 1 & 4 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти: $2A+B-3C$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Тема: Действия над матрицами

Цель работы: сформировать навыки выполнения операций над матрицами: сложение, вычитание, умножение матрицы на число, произведение матриц.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

1. Умножение матрицы на число – для того чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент матрицы умножить на это число.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Сумма (разность) матриц – для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были одинаковыми по размеру.

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 0+5 \\ 7+1 & 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Для разности матриц правило аналогичное, необходимо найти разность соответствующих элементов.

3. Умножение матриц – чтобы матрицу можно было умножить на матрицу нужно, чтобы число столбцов матрицы равнялось числу строк матрицы.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 3 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Содержание работы:

Задание 1. Для матриц A, B, C вычислить $5A - 2B + 3C$, $AB - BA$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Задание 2. Для матриц A, B, C вычислить $AB + 3C$, $AC + 2B$, $2A - B + 2C$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Найти произведение матриц

$$\text{А) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Б) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{В) } (1 \ 2 \ -3) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Г) } \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Д) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Тема: Решение систем уравнений методами Крамера, Гаусса, методом обратной матрицы

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Метод Гаусса:

[illegible]

a_{ij} – коэффициенты уравнения, $i=1, 2, 3, \dots, n$; $j=1, 2, 3, \dots, m$.

Решением системы называется любая конечная последовательность из m чисел (c_1, c_2, \dots, c_m) , которая является решением каждого из уравнений системы.

1. Система приводится к ступенчатому (треугольному) виду

[illegible]

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными x, y, z

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2; \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение матрицу систему $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ и расширенную

матрицу $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & b_3 \end{pmatrix}$.

1. Перестановка местами двух рядов матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Умножение (деление) всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля:

Разделим элементы первой строки на 2, а второй – умножим на 2

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0,5 & 1,5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Прибавление ко всем элементам одного ряда матрицы соответствующих элементов другого ряда, умноженных на одно и тоже число:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Умножим элементы первой строки на 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прибавим ко всем элементам первой строки соответствующие элементы второй строки, при этом элементы первой строки запишем без изменений:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$$

Разделим элементы первой строки на 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

На практике некоторые действия выполняют устно:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4 \quad 10} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$$

Если в процессе преобразований появится нулевой ряд в матрице, его можно удалить.

Содержание работы:

Задание 1. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11; \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & 1 & -5 & 9 \end{array} \right)$$

$$\begin{matrix} -2 & 4 & -8 & -12 & -4 & 8 & -16 & -24 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & 1 & -5 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 9 & -21 & -15 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Исходная система свелась к ступенчатой:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6; \\ 3x_2 - 5x_3 = -1; \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Из последнего уравнения $x_3 = 2$, из предпоследнего уравнения $3x_2 - 5 \cdot 2 = -1$ или $x_2 = 3$.

Найдем из первого уравнения x_1 : $x_1 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 6$ или $x_1 = 4$.

Ответ: (4; 3; 2)

Задание 2. Решите системы:

а)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 9; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 13; \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 9; \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 17. \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -1; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10; \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} 3x + 4y - z - u = 3; \\ 2x - y - 2z + 2u = 9; \\ x + 3y + 5z - 4u = 2; \\ 4x - 8y - 3z + 3u = 10. \end{cases}$$

д)
$$\begin{cases} x - 2y + z - u = 0; \\ 2x + y + 3z + u = 12; \\ x + 3y + z + 2u = 10; \\ 3x - y - z + 3u = 17. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 12 + 1 - 16 + 9 = 14 \neq 0.$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 14, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -14.$$

$$x_3 = \frac{-14}{14} = -1, \quad x_2 = \frac{0}{14} = 0, \quad x_1 = \frac{14}{14} = 1,$$

Ответ: (1; 0; -1) .

Задание 2. Решите системы:

$$1 \quad \begin{cases} 3x + 5y + z = -2 \\ -2x - 2y - 3z = 7 \\ x + 4y + z = -5 \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x - y + 3z = 2 \\ 4x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} x + y - 3z = -3 \\ 2x - y - 6z = 9 \\ -x + y + 4z = -6 \end{cases}$$

$$4 \quad \begin{cases} 3x - 6y - z = 1 \\ -x + 2y + z = -3 \\ 2x + y + 3z = -4 \end{cases}$$

$$5 \quad \begin{cases} 3x + 5y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 1 \\ -x + 3y - 3z = -4 \end{cases}$$

$$6 \quad \begin{cases} -x - y + z = -5 \\ 3x + 2y + 2z = -3 \\ -2x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

Тема: Решение систем уравнений методами Крамера, Гаусса, методом обратной матрицы

Цель работы: научить решать системы линейных уравнений методом Крамера, методом Гаусса, методом обратной матрицы

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Метод обратной матрицы:

Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда матрица A – невырожденная. Если обратная матрица A^{-1} существует, то она единственная.

Метод присоединённой (союзной) матрицы

Пусть задана матрица $A_{n \times n}$. Для того, чтобы найти обратную матрицу A^{-1} , требуется осуществить три шага:

Найти определитель матрицы A и убедиться, что $\Delta A \neq 0$, т.е. что матрица A – невырожденная.

Составить алгебраические дополнения A_{ij} каждого элемента матрицы A и записать матрицу $A_{n \times n}^* = A_{ij}$ из найденных алгебраических дополнений.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^{*T}$$

Записать обратную матрицу по формуле

Матрица A^{*T} называется присоединённой (взаимной, союзной) к матрице A .

Содержание работы:

Задание 1. Дана матрица A . Найти обратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение. Вычисляем определитель матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot (-1) \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot (-1) = 1 + 12 + 0 + 2 - 3 + 0 = 12 \neq 0$$

Так как определитель не равен нулю, то матрица имеет обратную.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^{*T}$$

Обратная матрица A^{-1} к матрице A находится по формуле:

Найдем (присоединенную) союзную матрицу A^{*T} , для этого вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -[2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1] = -(-2 - 1) = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) = 6 + 1 = 7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -[0 \cdot (-1) - 3 \cdot 2] = -(0 - 6) = 6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 = -1 - 2 = -3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -[1 \cdot 3 - 1 \cdot 0] = -(3 - 0) = -3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 0 + 2 = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -[1 \cdot 1 - 2 \cdot 2] = -(1 - 4) = 3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 = -1 - 0 = -1$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 6 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица, составленная из алгебраических дополнений к элементам матрицы A .

Транспонируем эту матрицу (т.е. строки матрицы делаем столбцами с тем же номером), получим присоединенную (союзную) матрицу A^{*T} :

$$A^{*T} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{12} & \frac{6}{12} & \frac{2}{12} \\ \frac{3}{12} & -\frac{3}{12} & \frac{3}{12} \\ \frac{7}{12} & -\frac{3}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$A^{*T} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Ответ:

Задание 2. Найти A^{-1} , если: а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 3. Показать, что матрица А является обратной для матрицы В, если:

А) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

Б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Задание 4. Найти A^{-1} , если

А) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Тема: Векторы и прямая на плоскости.

Цель работы: научить находить координаты вектора; производить действия над векторами (сложение, вычитание, умножение вектора на число), вычислять скалярное произведение; вычислять угол между векторами; находить проекцию вектора на ось.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Пусть в трехмерном пространстве заданы векторы $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}, \vec{c}\{x_3; y_3; z_3\}$ своими координатами.

1) Сложение двух векторов производится поэлементно, то есть если $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то в координатной форме записывается:

$$\vec{c}\{x_3; y_3; z_3\} = \{x_1; y_1; z_1\} + \{x_2; y_2; z_2\} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$$

2) Умножение вектора на число. В случае n-мерного пространства произведение вектора $\vec{a} = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ и числа k можно найти воспользовавшись следующей формулой:

$$k \cdot \vec{a} = \{k \cdot a_1; k \cdot a_2; \dots; k \cdot a_n\}$$

Пример 1. Найти произведение вектора $\vec{a} = \{1; 2\}$ на 3.

Решение: $3 \cdot \vec{a} = \{3 \cdot 1; 3 \cdot 2\} = \{3; 6\}$.

3). Координаты вектора. Вектор \vec{AB} заданный координатами точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ можно найти воспользовавшись следующей формулой $\vec{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

Пример 2. Найти координаты вектора \vec{AB} , если $A(1; 4; 5)$, $B(3; 1; 1)$.

Решение: $\vec{AB} = \{3 - 1; 1 - 4; 1 - 5\} = \{2; -3; -4\}$.

4) Длина вектора. Если даны две точки пространства $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то длину отрезка AB можно вычислить по формуле $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Пример 3. Даны точки $A(-3; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти длину отрезка AB .

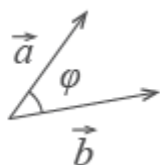
Решение: по соответствующей формуле:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Ответ: $|\vec{AB}| = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8,94$ ед.

5. Скалярное произведение векторов – произведение длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$



6. Из формулы для скалярного произведения можно найти угол между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

Пример 4. Найти угол между векторами $a = \{3; 4; 0\}$ и $b = \{4; 4; 2\}$.

Решение: Найдем скалярное произведение векторов:

$$a \cdot b = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 12 + 16 + 0 = 28.$$

Найдем модули векторов:

$$|a| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|b| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$$

Найдем угол между векторами:

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{28}{5 \cdot 6} = \frac{14}{15}$$

Содержание работы:

Задание 1. Найти сумму векторов

$$\vec{a}\{1; -2; 3\}, \quad \vec{b}\{4; 0; -1\}$$

$$\vec{a}\{1; -2; 3\}, \quad \vec{b}\{4; 0; -1\}$$

Задание 2. Найти разность векторов

$$\vec{a}\{4; 1; -3\}, \quad \vec{b}\{0; -5; 2\}$$

$$\vec{a}\{4; 1; -3\}, \quad \vec{b}\{0; -5; 2\}$$

Задание 3. Найти произведение вектора на число

$$\vec{a}\{-1; 3; 1\} \vec{a}\{-1; 3; 1\}, \delta - \text{число } \delta - \text{число}$$

$$\delta = -3 \quad \delta = -3$$

Задание 4. Вычислить координаты середины отрезка

$$\text{Точка } A(1; 2; -3) (1; 2; -3). \text{ Точка } B (-3; 4; -1)]$$

$$\text{.Точка } C - \text{середина отрезка } AB. C(x_c, y_c, z_c)$$

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Задание 5. Найти координаты вектора

$$\text{Точка } A(5; 0; -3). (5; 0; -3). \text{ Точка } B (-1; 4; -7)]$$

Задание 6. Вычислить скалярное произведение векторов

$$\vec{a}\{-2; 3; 7\}, \quad \vec{b}\{-9; 0; 2\}$$

$$\vec{a}\{-2; 3; 7\}, \quad \vec{b}\{-9; 0; 2\}$$

Задание 7. Найти косинус угла между векторами

$$\vec{a}\{2; 0; 1\}, \quad \vec{b}\{-3; 1; 2\} \vec{a}\{2; 0; 1\}, \quad \vec{b}\{-3; 1; 2\}$$

Задание 8. Проверьте перпендикулярность векторов

$$\vec{a}\{-4; 0; 1\}, \quad \vec{b}\{2; 7; 8\} \vec{a}\{-4; 0; 1\}, \quad \vec{b}\{2; 7; 8\}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

Тема: Векторы и прямая на плоскости.

Цель работы: научить находить координаты вектора; производить действия над векторами (сложение, вычитание, умножение вектора на число), вычислять скалярное произведение; вычислять угол между векторами; находить проекцию вектора на ось.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Содержание работы:

Задание 1. Найти сумму векторов

$$\vec{a}\{2; -3; 4\}, \quad \vec{b}\{-1; 2; 0\}$$

$$\vec{a}\{2; -3; 4\}, \quad \vec{b}\{-1; 2; 0\}$$

Задание 2. Найти разность векторов

$$\vec{a}\{4; -5; 7\}, \quad \vec{b}\{3; -1; 2\}$$

$$\vec{a}\{4; -5; 7\}, \quad \vec{b}\{3; -1; 2\}$$

Задание 3. Найти произведение вектора на число

$$\vec{a}\{-2; 4; 0\} \vec{a}\{-2; 4; 0\}, \delta - \text{число } \delta - \text{число}$$

$$\delta = -4 \quad \delta = -4$$

Задание 4. Вычислить координаты середины отрезка

$$\text{Точка } A(-3; 1; 2) (-3; 1; 2) \text{ Точка } B(2; -3; 1)]$$

Задание 5. Найти координаты вектора

$$\text{Точка } A(6; -3; 4). (6; -3; 4). \text{ Точка } B(1; -4; 7)]$$

Задание 6. Вычислить скалярное произведение векторов

$$\vec{a}\{-3; 2; 9\}, \quad \vec{b}\{-7; 0; 3\}$$

$$\vec{a}\{-3; 2; 9\}, \quad \vec{b}\{-7; 0; 3\}$$

Задание 7. Найти косинус угла между векторами

$$\vec{a}\{4; 1; 0\}, \quad \vec{b}\{-5; 3; 1\}$$

$$\vec{a}\{4; 1; 0\}, \quad \vec{b}\{-5; 3; 1\}$$

Задание 8. Проверьте перпендикулярность векторов

$$\vec{a}\{0; -3; 2\}, \quad \vec{b}\{9; 4; 6\}$$

$$\vec{a}\{0; -3; 2\}, \quad \vec{b}\{9; 4; 6\}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

Тема: Задачи на составление уравнений и построение прямых и плоскостей

Цель работы: сформировать навыки составления уравнений прямых и кривых второго порядка, их построения

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Уравнение первой степени относительно переменных x и y , то есть уравнение вида $Ax + By + C = 0$ при условии, что коэффициенты A и B одновременно не равны нулю, называется *общим уравнением* прямой.

Уравнение вида $n \cdot (r - r_0) = 0$ называется *векторным уравнением* прямой. Если его переписать в координатной форме, то получится уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Каноническое уравнение прямой записывается в следующем виде $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$, где m и n - координаты направляющего вектора прямой.

Уравнение прямой в отрезках на осях имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a и b - соответственно абсцисса и ордината точек пересечения прямой с осями Ox и Oy .

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид $y = kx + b$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$ - угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона прямой к оси Ox , а b - ордината точки пересечения прямой с осью Oy .

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_A; y_A)$ в заданном направлении, имеет вид $y - y_A = k \cdot (x - x_A)$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$ - угловой коэффициент прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$, имеет вид $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A)$. Угловой коэффициент прямой,

проходящей через точки A и B , находится из соотношения $k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки этой плоскости, называемой центром.

Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r имеет вид $x^2 + y^2 = r^2$.

Уравнение окружности с центром в точке $O_1(a; b)$ и радиусом r имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Уравнение окружности в общем виде записывается так: $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$, где A , B , C и D - постоянные коэффициенты.

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная^(2a), большая расстояния между фокусами^(2c).

Уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox , имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$), где a - длина большей полуоси; b - длина малой полуоси.

Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная^(2a), меньшая расстояния между фокусами^(2c).

Уравнение гиперболы, фокусы которого лежат на оси Ox , имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a - длина действительной полуоси; b - длина мнимой полуоси.

Параболой называется множество точек на плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой.

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Ox и ветви направлены вверх, имеет вид $x^2 = 2py$, где $p > 0$ (параметр параболы) – расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение ее директрисы $y = -\frac{p}{2}$.

Содержание работы:

Задание 1. Построить прямую $3x + 4y - 12 = 0$.

Решение: Найдем точки пересечения прямой с осями Ox и Oy .

Пусть $x = 0 \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(0, 3)$.

Пусть $y = 0 \Rightarrow 3x - 12 = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 0)$.

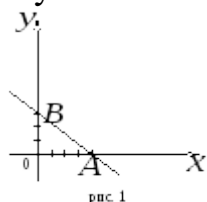


рис 1

Изобразим найденные точки на координатной плоскости и соединим их, таким образом, получим прямую заданную уравнением $3x + 4y - 12 = 0$ (рис. 1).

Задание 2: Построить прямую $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$.

Решение: Перепишем уравнение в виде: $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$, то есть $a = 2$ и $b = -3$. Таким образом, получаем точки $A(2; 0)$ и $B(0; -3)$, прямая проходящая через точки A и B является искомой (рис. 2).

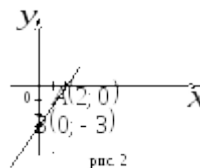


рис 2

Задание 3: Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $M(2; 3)$.

Решение: Вектор $OM = (2; 3)$ коллинеарен искомой прямой. Для составления уравнения прямой используем каноническое уравнение прямой:

$$\frac{(x - x_0)}{m} = \frac{(y - y_0)}{n}$$
. Таким образом, подставив в данное уравнение $m = 2, n = 3, x = 0, y = 0$ получим искомое уравнение прямой проходящей через начало координат и точку $M(2; 3)$:

$$\frac{(x - 0)}{2} = \frac{(y - 0)}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow 3x - 2y = 0$$

Задание 4: Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(3; -5)$ и перпендикулярной данному вектору $n = (4; 2)$.

Решение: Пусть $M(x; y)$ - произвольная точка искомой прямой. Вектор $M_0M = (x - 3; y + 5)$ перпендикулярен вектору $n = (4; 2)$. Так как векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, то есть $n \cdot M_0M = 0$. Записав произведение этих векторов в координатной форме, получим:
 $(4; 2) \cdot (x - 3; y + 5) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (x - 3) + 2 \cdot (y + 5) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4x - 12 + 2y + 10 = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0$. Уравнение искомой прямой имеет вид $2x + y - 1 = 0$.

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Проверить принадлежат ли точки $A(3; 14), B(4; 13), C(-3; 0)$ и $D(0; 7)$ прямой $7x - 3y + 21 = 0$.
2. Построить прямые:
 1) $x = 4$; 2) $x = -3$; 3) $y = 2$;
3. Построить фигуру, ограниченную линиями $x = -2, x = 0, y = -3$ и $y = 0$. Вычислить площадь этой фигуры.
4. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $M(x; y)$: $M(-4; -1)$
5. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 и перпендикулярной данному вектору n : $M_0(-2; -3); n = (4; 5)$;
6. Составить уравнение окружности, проходящей через точки:
 $A(3; 1), B(-2; 6), C(-5; -3)$;
7. Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках A и B , а фокусы в точках F_1 и F_2 :
 1) $A(-5; 0), B(5; 0), F_1(-3; 0), F_2(3; 0)$;
 2) $A(0; -8), B(0; 8), F_1(-5; 0), F_2(5; 0)$;

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

Тема: Задачи на составление уравнений и построение прямых и плоскостей

Цель работы: сформировать навыки составления уравнений прямых и кривых второго порядка, их построения

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Содержание работы:

Задание 1.

1. Построить прямые:

- 1) $2x - 5y + 10 = 0$; 2) $4x + 6y - 3 = 0$; 3) $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$;
4) $\frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 1$; 5) $-\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$; 6) $-\frac{x}{6} - \frac{y}{3} = 1$.

2. Преобразуйте уравнения следующих прямых к уравнениям в отрезках на осях:

- 1) $3x - 4y + 2 = 0$; 2) $x + y - 3 = 0$;
3) $2x + 3y + 1 = 0$; 4) $2x + 3y - 6 = 0$;
5) $3x - 4y + 12 = 0$.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $M(x; y)$: $M(5; -4)$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 и перпендикулярной данному вектору n : $M_0(1; -1)$; $n = (-3; 4)$.

5. Составить уравнение окружности, проходящей через точки:

- 1) $A(2; 8)$, $B(4; -6)$, $C(-12; -6)$;
2) $A(-2; -6)$, $B(-3; 1)$, $C(4; 2)$.

6. Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках A и B , а фокусы в точках F_1 и F_2 : $A(0; -4)$, $B(0; 4)$, $F_1(0; -2)$, $F_2(0; 2)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10

Тема: Действия с комплексными числами, записанными в различных формах. Решение уравнений

Цель работы: научиться находить целую и мнимую части, модуль комплексного числа, выполнять арифметические операции с комплексными числами (сложение и вычитание, умножение и деление), а также возведение мнимой единицы в степень, решать квадратные уравнения в комплексных числах.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Число вида $z=a+bi$, где a и b – действительные числа, i – так называемая **мнимая единица**. Число a называется **действительной частью ($Re\ z$)** комплексного числа z , число b называется **мнимой частью ($Im\ z$)** комплексного числа z .

Число $\bar{z}=a-bi$ называется **сопряженным** комплексному числу z .

Множество комплексных чисел принято обозначать «жирной» или утолщенной буквой C . Комплексная плоскость состоит из двух осей:

$Re\ z$ – действительная ось

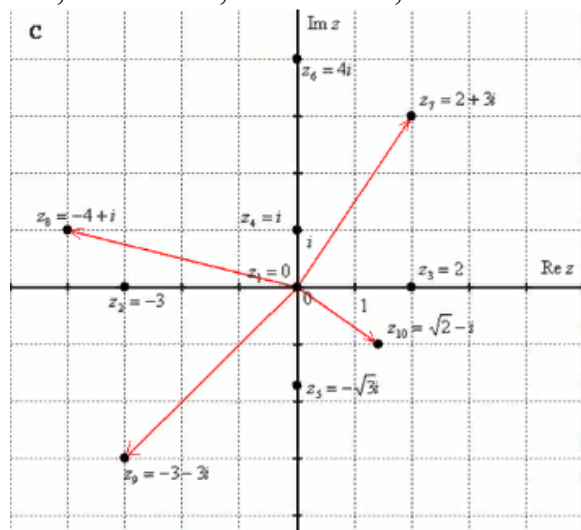
$Im\ z$ – мнимая ось

Построим на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

$$z_1 = 0, z_2 = -3, z_3 = 2$$

$$z_4 = i, z_5 = -\sqrt{3}i, z_6 = 4i$$

$$z_7 = 2+3i, z_8 = -4+i, z_9 = -3-3i, z_{10} = \sqrt{2}-i$$



Модулем комплексного числа z называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, **модуль** – это **длина** радиус-вектора, который на чертеже обозначен красным цветом. Модуль комплексного числа z стандартно обозначают: $|z|$. По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Действия с комплексными числами

Сложение комплексных чисел. Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части.

Пример №1. $z_1 = 1 + 3i$; $z_2 = 4 - 5i$

$$z_1 + z_2 = 1 + 3i + 4 - 5i = 5 - 2i$$

Вычитание комплексных чисел. Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака.

Пример №2. $z_1 - z_2 = 1 + 3i - (4 - 5i) = 1 + 3i - 4 + 5i = -3 + 8i$

Умножение комплексных чисел. При умножении комплексных чисел необходимо воспользоваться правилом умножения многочленов: чтобы умножить многочлен на многочлен нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и помнить, что $i^2 = -1$.

Пример №3.

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 3i) \cdot (4 - 5i) = 1 \cdot 4 + 3i \cdot 4 + 1 \cdot (-5i) + 3i \cdot (-5i) = 4 + 12i - 5i - 15i^2 = 4 + 12i - 5i - 15 \cdot (-1) = 4 + 12i - 5i + 15 = 19 + 7i.$$

Деление комплексных чисел. Деление чисел осуществляется методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение.

Пример №4.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 3i}{4 - 5i} = \frac{(1 + 3i) \cdot (4 + 5i)}{(4 - 5i) \cdot (4 + 5i)} = \frac{4 + 12i + 5i + 15i^2}{4^2 - (5i)^2} = \frac{4 + 17i - 15}{16 + 25} = \frac{-11 + 17i}{41} = \frac{-11}{41} + \frac{17}{41}i.$$

Модуль комплексного числа: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Пример №5. Возвести в степень комплексные числа i^{10} , i^{33} , $(-i)^{21}$

Если мнимая единица возводится в четную степень, то техника решения такова: $i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1$

Если мнимая единица возводится в нечетную степень, то «отщипываем» одно «и», получая четную степень: $i^{33} = i \cdot i^{32} = i \cdot (i^2)^{16} = i \cdot (-1)^{16} = i \cdot 1 = i$

Если есть минус (или любой действительный коэффициент), то его необходимо предварительно отделить:

$$(-i)^{21} = (-1)^{21} \cdot i^{21} = -i \cdot i^{20} = -i \cdot (i^2)^{10} = -i \cdot (-1)^{10} = -i$$

Извлечение корней из комплексных чисел.

Квадратное уравнение с комплексными корнями

Пример №6. $z = \sqrt{-4}$

В комплексных числах извлечь корень – можно! А точнее, два корня:

$$z_1 = 2i; z_2 = -2i$$

Такие корни также называют *сопряженными комплексными корнями*.

$$\sqrt{-1} = \pm i, \quad \sqrt{-9} = \pm 3i, \quad \sqrt{-36} = \pm 6i, \quad \sqrt{-3} = \pm \sqrt{3}i, \quad \sqrt{-5} = \pm \sqrt{5}i \text{ и т.д.}$$

Во всех случаях получается два сопряженных комплексных корня.

Пример 7. Решить квадратное уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$

Вычислим дискриминант:

$$D = 36 - 136 = -100$$

$$\sqrt{D} = \pm 10i$$

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm 10i}{2}$$

$z_{1,2} = 3 \pm 5i$ – сопряженные комплексные корни

Содержание работы:

Задание 1. Даны два комплексных числа $|z_1|$ и $|z_2|$. Вычислите:

1. $z_1 = 2 - 3i; z_2 = -5 - i$
2. $z_1 = -2 - i; z_2 = 4 + 2i$
3. $z_1 = 5 + 2i; z_2 = -1 + i$
4. $z_1 = 2 + 4i; z_2 = -1 - 3i$
5. $z_1 = -6 - i; z_2 = -5 + i$
6. $z_1 = -6 + i; z_2 = 4 + 3i$
7. $z_1 = 8 - 2i; z_2 = -1 + 3i$
8. $z_1 = 2 - 5i; z_2 = -3 - 4i$
9. $z_1 = 2 - 2i; z_2 = -2 + 6i$
10. $z_1 = -4 - 3i; z_2 = 4 + 3i$

Задание 2. Вычислить модуль комплексного числа

1. $z = 3 + 4i$
2. $z = -1 + \sqrt{3}$

Задание 3. Решить квадратное уравнение $x^2 - 4x + 13 = 0$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11

Тема: Действия с комплексными числами, записанными в различных формах. Решение уравнений

Цель работы: научиться находить целую и мнимую части, модуль комплексного числа, выполнять арифметические операции с комплексными числами (сложение и вычитание, умножение и деление), а также возведение мнимой единицы в степень, решать квадратные уравнения в комплексных числах.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Содержание работы:

Задание 1. Изобразите на плоскости заданные комплексные числа

а) $Z_1 = 4i$, $Z_2 = 3 + i$, $Z_3 = -4 + 3i$, $Z_4 = -2 + 5i$

б) $Z_1 = 5i$, $Z_2 = 4 + i$, $Z_3 = -7 + 2i$, $Z_4 = -3 - 6i$

Задание 2. Вычислить модуль комплексного числа $Z = 8 + 6i$

Задание 3. Произвести сложение и вычитание комплексных чисел

А) $Z_1 = 3 + 5i$, $Z_2 = 7 - 2i$

Б) $Z_1 = 3 - 2i$, $Z_2 = 5 + 3i$

Задание 4. Выполнить действия над комплексными числами

А) $(2+3i)(5-7i)$

Б) $(3+2i)(3-2i)$

В) $(3+5i)^2$

Г) $\frac{2+3i}{5-7i}$

Задание 5. Решить уравнения:

А) $2,5x^2 + x + 1 = 0$

Б) $x^2 + 3x + 4 = 0$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12

Тема: Раскрытие неопределенностей

Цель работы: научить раскрывать неопределенности вида $0/0$ и ∞/∞ путем разложения на множители.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Число a называется пределом последовательности $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε (эпсилон) найдется такое положительное число N , что абсолютная величина разности $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. Это кратко записывается так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Для раскрытия неопределенности такого вида необходимо предварительно сократить дробь (разложив на множители), а затем найти предел.

Например,

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}.$$

Здесь числитель и знаменатель дроби при $x \rightarrow 3$ стремятся к нулю. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = \frac{3+3}{3} = 2.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-2}{x-4} = \frac{3}{1} = 3,$$

где необходимо было решить квадратные уравнения для разложения квадратного трехчлена на множители в числителе и в знаменателе дроби по формуле $ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$.

3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+3x} + 1)}{(\sqrt{1+3x} - 1)(\sqrt{1+3x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+3x} + 1)}{1+3x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+3x} + 1)}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} + 1}{3} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

здесь, для того чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, и числитель и знаменатель были умножены на выражение, сопряженное знаменателю, а затем знаменатель был свернут по формуле разности квадратов.

Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$

Для раскрытия неопределенности такого вида необходимо числитель и знаменатель разделить на x с наибольшим показателем степени.

Например:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^2 + 2}{x^3 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^4}{x^5 + x^6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^6} + \frac{x^4}{x^6}}{\frac{x^5}{x^6} + \frac{x^6}{x^6}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 - x - 6}{3x - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{\frac{3}{x} - 1} = \frac{10}{-1} = -10$$

Содержание работы:

Задание 1. Найти пределы на раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{x^3 - 27}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{2 - \sqrt{x - 1}}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x^4 - 25}{x^2 - 5}$$

Задание 2. Найти пределы на раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 6}{3x^3 + x^2 - 26}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 5}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^3 + 3x + 7}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13

Тема: Раскрытие неопределенностей

Цель работы: научить раскрывать неопределенности вида $0/0$ и ∞/∞ путем разложения на множители.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Содержание работы:

Задание 1. Найти пределы на раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$

$$9. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-8x+15}{x^2-25}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2-7x-2}{5x^2-9x-2}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2}$$

Задание 2. Найти пределы на раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3-4x+8}{5x^3+27x^2+x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^4-8x^2+3}{5x^4+3x^3+5}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+4x^2-1}{8x^2-6x+3}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14

Тема: Вычисление производных, исследование функции

Цель работы: научиться вычислять производные элементарных функций с помощью схемы вычисления и таблицы для производных, применять на практике теоремы дифференцирования

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Правила вычисления производных:

$$\begin{aligned}(cu)' &= cu' & (u \cdot v)' &= u'v + u \cdot v' \\ (u \pm v)' &= u' \pm v' & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}\end{aligned}$$

Формулы производных:

$$\begin{aligned}1) \quad c' &= 0 \\ 2) \quad x' &= 1 \\ 3) \quad (kx)' &= k \\ 4) \quad (x^n)' &= n \cdot x^{n-1} \\ 5) \quad (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ 6) \quad \left(\frac{1}{x}\right)' &= -\frac{1}{x^2} \\ 7) \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)' &= -\frac{2}{x^3} \\ 8) \quad \left(\frac{1}{x^3}\right)' &= -\frac{3}{x^4}\end{aligned} \quad \begin{aligned}9) \quad (\sin x)' &= \cos x \\ 10) \quad (\cos x)' &= -\sin x \\ 11) \quad (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ 12) \quad (\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \\ 13) \quad (a^x)' &= a^x \cdot \ln a \\ 14) \quad (e^x)' &= e^x \\ 15) \quad (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ 16) \quad (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}\end{aligned}$$

Примеры:

$$\begin{aligned}1. \quad (x^5 + \sqrt[3]{x})' &= (x^5)' + (\sqrt[3]{x})' = 5x^4 + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = 5x^4 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 5x^4 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ 2. \quad (x^3 \cdot \sin x)' &= (x^3)' \cdot \sin x + x^3 \cdot (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cdot \cos x \\ 3. \quad \left(\frac{3x}{1-x^2}\right)' &= \frac{(3x)'(1-x^2) - 3x(1-x^2)'}{(1-x^2)'} = \frac{3(1-x^2) - 3x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \\ &= \frac{3-3x^2+6x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{3+3x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{3(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \\ 4. \quad ((2x-5)^8)' &= 8(2x-5)^7 (2x-5)' = 8(2x-5)^7 \cdot 2 = 16(2x-5)^7 \\ 5. \quad (\sin^4 x)' &= 4\sin^3 x \cdot (\sin x)' = 4\sin^3 x \cdot \cos x \\ 6. \quad (\operatorname{tg}(3x-2))' &= \frac{1}{\cos^2(3x-2)} \cdot (3x-2)' = \frac{3}{\cos^2(3x-2)}\end{aligned}$$

Содержание работы:

Вариант 1.

Задание 1. Используя схему вычисления производной, найдите производную функции:

1. $y = x^2(x^2 - 3)$; 2. $y = (4x - 3)^{-6}$; 3. $y = 2x^3 - 4x^2 + x$;

Задание 2. Вычислите производную функции в заданных точках:

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$ в точках $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

2. $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Задание 3. Применяя теоремы дифференцирования и таблицу для производных, вычислите производные функции:

1. $y = \sqrt{1 - x^2}$; 2. $y = \frac{2x - x^3}{x^2 - 1}$; 3. $y = \sin(6 + 7x)$.

Задание 4. Найти значения x , при которых значения производной функции $f(x) = \frac{x}{x^3 + 3}$ отрицательны.

Вариант 2

Задание 1. Используя схему вычисления производной, найдите производную функции:

1. $y = 5x^2 - 4x$; 2. $y = x(x^2 + 3)$; 3. $y = \frac{2 - x^3}{x^2 + 5x}$;

Задание 2. Вычислите производную функции в заданных точках:

1. $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2$ в точках $x = 0$, $x = 2$.

2. $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Задание 3. Применяя теоремы дифференцирования и таблицу для производных, вычислите производные функции:

1. $y = \sqrt{1 - 2x^2}$; 2. $y = \ln(2 - 3x)$; 3. $y = \sin(x + 7)$.

Задание 4. Найти значения x , при которых значения производной функции $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 3}$ положительны.

Вариант 3

Задание 1. Используя схему вычисления производной, найдите производную функции:

1. $y = x^2(x + 2)$; 2. $y = 3 \cdot (4x - 3)^{-6}$; 3. $y = \frac{1}{4}x^4 - 4x$;

Задание 2. Вычислите производную функции в заданных точках:

1. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 6x^2$ в точках $x = 0$, $x = 2$.

2. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Задание 3. Применяя теоремы дифференцирования и таблицу для производных, вычислите производные функции:

1. $y = \sqrt{2-x^3}$; 2. $y = (2x+1)(x^2-5)$; 3. $y = \cos(3x-2)$.

Задание 4. Найти значения x при которых значения производной функции $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$ равны нулю.

Вариант 4

Задание 1. Используя схему вычисления производной, найдите производную функции:

1. $y = \frac{2x-x^3}{x^2+5}$; 2. $y = (5x+2)^{-6}$; 3. $y = x^3 + 4x^2 + x$;

Задание 2. Вычислите производную функции в заданных точках:

1. $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$ в точках $x = 0$, $x = 2$.

2. $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Задание 3. Применяя теоремы дифференцирования и таблицу для производных, вычислите производные функции:

1. $y = \sqrt{x^2-2}$; 2. $y = xe^{5-3x}$; 3. $y = \cos(-6x+7)$.

Задание 4. Найти значения x при которых значения производной функции $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$ отрицательны.

Вариант 5

Задание 1. Используя схему вычисления производной, найдите производную функции:

1. $y = 5x^2 - 4x$; 2. $y = 4 \cdot (3x-4)^{-6}$; 3. $y = x^3 - 4x^2 + x$;

Задание 2. Вычислите производную функции в заданных точках:

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$ в точках $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

2. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 6x^2$ в точках $x = 0$, $x = 2$.

Задание 3. Применяя теоремы дифференцирования и таблицу для производных, вычислите производные функции:

1. $y = \sqrt{1-2x^2}$; 2. $y = 5e^{2-3x}$; 3. $y = \sin(7+6x)$

Задание 4. Найти значения x при которых значения производной функции $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-3}$ отрицательны.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15

Тема: Вычисление производных, исследование функции

Цель работы: научиться применять производные первого и второго порядка для исследования функции и построения графика.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Общая схема построения графиков функций:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность или нечетность, периодичность.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Найти точки разрыва, асимптоты графика функции.
5. Исследовать функцию с помощью первой производной (Найти интервалы монотонности и экстремумы функции).
6. Исследовать функцию с помощью второй производной (Найти интервалы выпуклости и точки перегиба).
7. Найти дополнительные точки, если это необходимо.
8. Построить график, используя полученные результаты исследования.

Содержание работы:

Задание 1. Построить график функции $y=x^3-6x^2+9x-3$.

1. $D(x)=R$.
2. $y(-x)=(-x)^3-6(-x)^2+9(-x)-3=-x^3-6x^2-9x-3$, функция не является ни четной, ни нечетной. Функция непериодическая.
3. Т. пересечения с осью Oy ; $x=0$, $y=-3$. $(0;-3)$
4. Функция не имеет точек разрыва, следовательно, вертикальных асимптот нет.

Т.к $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x - 3}{x} = \infty$ нет и наклонных асимптот.

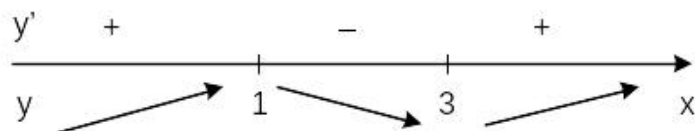
5. Найдем производную данной функции:

$$y' = 3x^2 - 12x + 9.$$

Решим уравнение $y'=0$: $3x^2-12x+9=0$,

$$x^2-4x+3=0,$$

$$x_1=1, x_2=3.$$






Исследуемая функция в промежутках $x < 1$ и $x > 3$ возрастает, а на промежутке $1 < x < 3$ убывает; $x=1$ – точка максимума, $x=3$ – точка минимума.

$$y_{\max}=y(1)=1, y_{\min}=y(3)=-3.$$

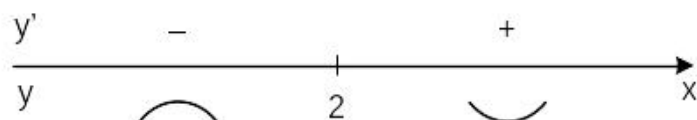
Удобно представить результаты исследования в таблицу:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$f(x)$		1		-	
				3	

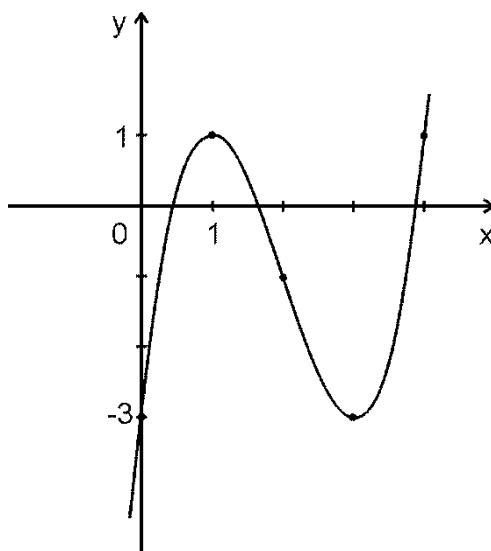
6. Найдем вторую производную: $y''=6x-12$; $y''=0$ при $x=2$.

Точка $x=2$ делит область определения функции на два промежутка: $x<2$ и $x>2$.



В первом из них $y''<0$, а во втором $y''>0$, т.е. при $x<2$ кривая выпукла вверх, а при $x>2$ выпукла вниз; $x=2$ – точка перегиба; $y(2) = -1$.

7.



Задание 2. Исследовать функцию и построить график

1. $y = x^4 - 8x^2 + 5$
2. $y = 3x^4 - 7x^2 + 1$
3. $y = x^3 + 3x^2 - 6$
4. $y = -x^3 - 3x^2 + 6$
5. $y = 4x^2 - 3x^4 + 2$
6. $y = 2x^2 - x^4 + 1$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16

Тема: Вычисление приближенных значений функции. Оценка погрешности

Цель работы: научиться находить дифференциал функции, находить приближенные значения функции с помощью дифференциала

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \rightarrow 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

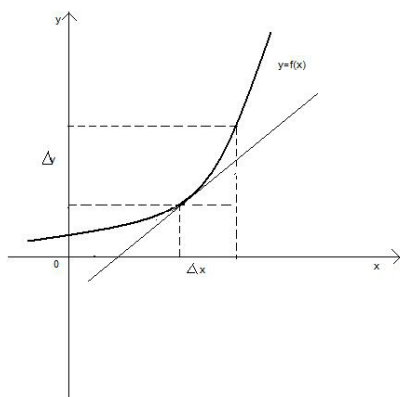
Величина $\alpha \Delta x$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x) \Delta x$, т.е. $f'(x) \Delta x$ - главная часть приращения Δy .

Определение. Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции.

Обозначается dy или $df(x)$.

Из определения следует, что $dy = f'(x) \Delta x$. Для функции x производная равна 1, и потому ее дифференциал равен Δx , $\Delta x = dx$. Поэтому принято вместо Δx писать dx . При этом формула дифференциала функции принимает вид: $dy = f'(x) dx$. (1)

Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$



Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$ - функции, дифференцируемые в точке x , то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

- 1) $d(u \pm v) = (u \pm v)' dx = u' dx \pm v' dx = du \pm dv$
- 2) $d(uv) = (uv)' dx = (u'v + v'u) dx = vdu + u dv$
- 3) $d(Cu) = Cdu$
- 4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$

5) $df(u) = f'(u)du$ где $u = \varphi(x)$.

С помощью дифференциала можно найти приближенные значения функции.

Учитывая, что $\Delta x \rightarrow 0$, приращение функции Δy приближённо равно ее дифференциалу, т.е. $\Delta y \approx dy$, откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) \quad (2)$$

Это означает, что приближенное значение функции вблизи точки x_0 равно сумме ее значения в этой точке и дифференциала в этой же точке.

Содержание работы:

Задание 1. Найдите дифференциал функции: $y = e^{\sin x}$

Решение. Воспользуемся формулой (1) $dy = f'(x)dx$.

$$dy = (e^{\sin x})' dx = \cos x e^{\sin x} dx$$

Задание 2. Найдите дифференциал функции: а) $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$; б) $y = x^3 \ln x$

Задание 3. Вычислить приближённо: $2,002^5$

Решение. Воспользуемся формулой (2): .

Положим $f(x) = x^5$, где $x = 2,002$.

$2,002 = 2 + 0,002$, т.е. $x_0 = 2, \Delta x = 0,002$

$$\int e^{\cos x} \sin x dx \quad f(x_0) = 2^5 = 32; \quad df(x) = 5x^4 \Delta x, \quad df(x_0) = 5 \cdot 2^4 \cdot 0,002 = 0,16$$

Т.о. $2,002^5 \approx 32 + 0,16 = 32,16$.

Задание 4. Вычислить приближённо: а) $\sqrt[3]{63}$; б) $\operatorname{tg} 46^\circ$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 17

Тема: Вычисление приближенных значений функции. Оценка погрешности

Цель работы: научиться находить дифференциал функции, находить приближенные значения функции с помощью дифференциала

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Содержание работы:

Вариант 1

1. Найдите дифференциал функции:

а) $y = \sin 3x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$ б) $y = x^2 \ln 2x$ в) $y = \frac{3x - 5}{3^x + 2}$

2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y = 2x^2 + 3x$ ее дифференциалом в точке $x = 2$ при $\Delta x = 0,1$.

3. Вычислить приближенно:

а) $\sqrt{26}$; б) $\sin 44^\circ$.

Вариант 2

1. Найдите дифференциал функции:

а) $y = \sqrt{3x - 2}$ в точке $x = 2$ б) $y = x^3 \cdot 2^{3x}$ в) $y = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$

2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y = -x^2 - 4x$ ее дифференциалом в точке $x = 3$ при $\Delta x = 0,02$.

3. Вычислить приближенно:

а) $\sqrt[4]{82}$; б) $\arctg 1,005$.

Вариант 3

1. Найдите дифференциал функции:

а) $y = 3 \cos \frac{x}{6}$ в точке $x_0 = 2\pi$ б) $y = 4x \ln 5x$ в) $y = 2^{\sqrt{x}}$

2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y = -x^3 + 3x$ ее дифференциалом в точке $x = 1$ при $\Delta x = 0,01$.

3. Вычислить приближенно:

а) $3,992^3$; б) $\tg 44^\circ$.

Вариант 4

1. Найдите дифференциал функции:

а) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ в точке $x = 6$ б) $y = \ln \sin 2x$ в) $y = \frac{3x^2 - x}{x - 4}$

2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y = 2x - x^2$ ее дифференциалом в точке $x = 3$ при $\Delta x = 0,02$.

3. Вычислить приближенно:

а) $4,95^3$; б) $\sin 31^\circ$.

Вариант 5

1. Найдите дифференциал функции:

а) $y = \ln 5x - 3$ в точке $x = 2$ б) $y = x^2 \sin 3x$ в) $y = \frac{3x^3}{4x + 2}$

2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=4x+x^2$ ее дифференциалом в точке $x=4$ при $\Delta x=0,01$.

3. Вычислить приближенно:

а) $\sqrt{50}$; б) $\operatorname{arcctg} 1,03^0$.

Вариант 6

1. Найдите дифференциал функции:

а) $y = 4 \cos 2x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{12}$ б) $y = x^2 \cdot 4^{2x}$ в) $y = \ln \frac{3}{x+2}$

2. Найдите абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y=x^2+x-1$ ее дифференциалом в точке $x=3$ при $\Delta x=0,01$.

3. Вычислить приближенно:

а) $4,003^3$; б) $\ln 1,03$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 18

Тема: Приложения определенного интеграла

Цель работы: сформировать навыки вычисления определенного интеграла

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в некотором промежутке X , а числа a и b принадлежат этому промежутку.

Определение. Приращение $F(b)-F(a)$ любой из первообразных функции $F(x)+C$ при изменении аргумента от $x=a$ до $x=b$ называется

определенным интегралом от a до b функции $f(x)$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

– формула Ньютона-Лейбница

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов. Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Интегрирование по частям.

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

Основные свойства определенного интеграла

$$1) \int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx.$$

$$2) \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

$$3) \text{ Если } a < c < b, \text{ то } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$$4) \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

Содержание работы:

Задание 1. Вычислить определённый интеграл $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)dx.$

Решение. $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)dx = (x^5 + x^2 - 8x) \Big|_1^2 = (2^5 + 2^2 - 8 \cdot 2) - (1^5 + 1^2 - 8 \cdot 1) = 2.$

Задание 2. Вычислить интегралы

$$1. \int_{-1}^2 (3 - x^5 + x)dx.$$

$$2. \int_1^3 \frac{21}{x^3} dx.$$

$$3. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) dx.$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^5 x \cos x dx.$$

$$5. \int_{-1}^0 3x^2 (x^3 + 5)^2 dx.$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{8}} x \sin 2x dx.$$

$$7. \int_0^1 (101 - x^2 + 4x^3) dx.$$

$$8. \int_1^4 \left(\frac{1}{x^2} + x \right) dx.$$

$$9. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$10. \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cos x dx.$$

$$11. \int_{-1}^1 3x(x^2 + 1)^5 dx.$$

$$12. \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos 2x dx.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 19

Тема: Приложения определенного интеграла

Цель работы: научиться применять определенный интеграл для нахождения площади плоских фигур, объема тел вращения, пройденного телом пути, работу силы

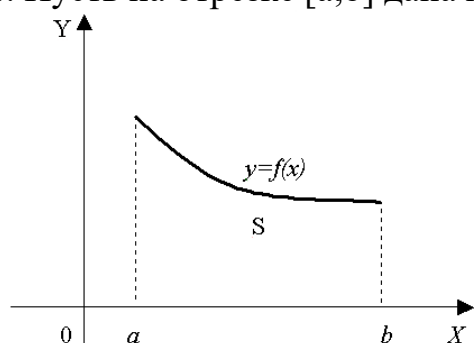
Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

Рассмотрим несколько случаев применения определенного интеграла для нахождения площадей плоских фигур.

1. Пусть на отрезке $[a; b]$ дана непрерывная неотрицательная функция $y=f(x)$.



$$\int_a^b f(x) dx$$

представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью OX. В этом и состоит *геометрический смысл* определенного интеграла.

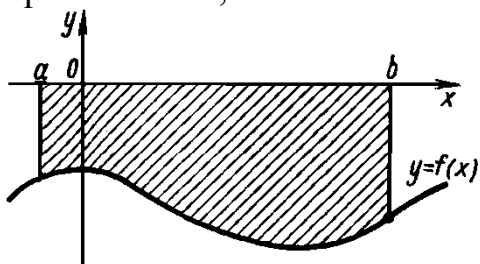
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Т.е. (1)

2. Фигура ограничена графиком непрерывной неположительной функции,

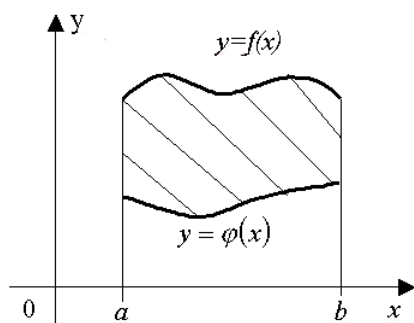
прямыми $x=a$, $x=b$ и осью OX. Тогда

$$S = - \int_a^b f(x) dx \text{ (или } S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|) \quad (2)$$



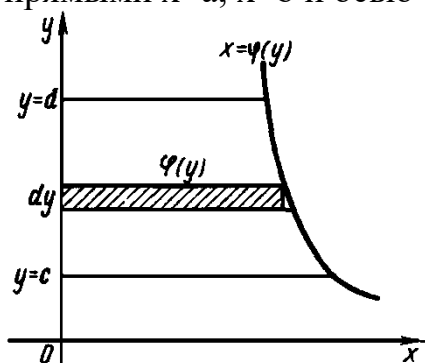
3. Фигура ограничена графиками двух непрерывных на отрезке функциями $y=f(x)$ и $y=g(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$, где $f(x) \geq g(x)$. Тогда

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \quad (3)$$

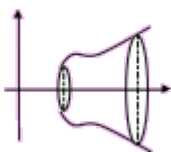


4. Фигура прилегает к оси ординат и ограничена непрерывной кривой $x=f(y)$,

прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Oy . Тогда $S = \int_a^b f(y) dy$. (4)



Объем тел вращения.



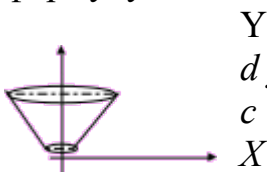
Рассмотрим кривую, заданную уравнением $y = f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox , то получим так называемое **тело вращения**.

Т.к. каждое сечение тела плоскостью $x = \text{const}$ представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (5)$$

Если же необходимо найти объем тела, полученного вращением графика непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $y=f(x)$ вокруг оси Oy , то применяем

формулу $V = \pi \int_c^d f^2(y) dy$ (6)



Вычисление пути, пройденного точкой

Если точка движется прямолинейно и ее скорость $v=f(t)$ есть известная функция времени t , то путь пройденный точкой за промежуток времени $t_1 \leq t \leq t_2$, вычисляется по формуле

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad (7)$$

Работа переменной силы

Если переменная сила $F=F(x)$ действует в направлении оси Ox , то работа силы на отрезке $a \leq x \leq b$ вычисляется по формуле

$$A = \int F(x) dx \quad (8)$$

Содержание работы:

Задание 1. Вычислить площадь тела ограниченной области, лежащей между графиками $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

Решение. Построим графики данных функции по точкам. Эти графики имеют две общих точек: $x_1=0$, $x_2=1$. При этом график функции находится выше графика функции. Значит, по формуле (3) площадь области между графиками равна

$$S_D = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left. \frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{1}{3} x^3 \right|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Задание 2. Вычислить объем тела, полученного от вращения графика функции $y = \frac{1}{x}$ $[1;3]$ вокруг оси Ox .

Решение. Используем формулу (5)

$$V = \pi \int_1^3 \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx = \pi \int_1^3 x^{-2} dx = - \left. \frac{\pi}{x} \right|_1^3 = - \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} (\text{куб.ед.})$$

Задание 3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(t^2+4t-2)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой за 6с от начала движения.

Решение. По условию $f(x)=(t^2+4t-2)$, $t_1=0$, $t_2=6$. По формуле (7) имеем:

$$S = \int_0^6 (t^2 + 4t - 2) dt = \left(\frac{t^3}{3} + 2t^2 - 2t \right) \Big|_0^6 = \frac{216}{3} + 72 - 12 = 132 (\text{м})$$

Задание 4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,03 м, если для сжатия ее на 0,02 м нужна сила 10 Н.

Решение. Согласно закону Гука $F=kx$. Т.к. $x=0,02$ при $F=10\text{Н}$, то

$$k \frac{F}{x} = \frac{10}{0,02} = 500 (\text{Н / м})$$

. Подставляя значение k в закон Гука, имеем: $f(x)=500x$.

По формуле (8) имеем:

$$A = \int_0^{0,03} 500x dx = 250x^2 \Big|_0^{0,03} = 250 \cdot (0,03)^2 = 0,225 (\text{Дж})$$

Задания для самостоятельного решения:

Вариант №1

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $x - y + 2 = 0, x = -1, x = 2$

б) $y = x^2 - 1, y = x + 1$.

2. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $x=0$, $x=6$, $y=0,5x+4$ и $y=0$.

3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(2t^2+3t-1)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой за 10с от начала движения.
4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,06 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

Вариант №2

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $2x-y+3=0, y=0, x=3, x=1$ б) $y=x^2-4, y=x-2$
2. Часть синусоиды $y=\sin x$ вращается вокруг оси Ох. Найдите объём тела вращения от $x=-\frac{\pi}{2}$ до $x=\frac{\pi}{2}$
3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(12t-3t^2)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой от начала движения до ее остановки.
4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,02 м нужна сила 40 Н.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 20

Тема: Приложения определенного интеграла

Цель работы: научиться применять определенный интеграл для нахождения площади плоских фигур, объема тел вращения, пройденного телом пути, работу силы

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Содержание работы:

Вариант 1

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y=x^2, y=0, x=1, x=3$. б) $y=x^2, y=2x-x^2$
2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y^2=6x, y=1, x=1, x=3$.
3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(4t^2+3t+1)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой за 4-ую секунду.
4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,08 м, если для сжатия ее на 0,02 м нужна сила 20 Н.

Вариант 2

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) б) $y=x^2, y=4x-x^2$
2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $x=0, x=3, x+y-3=0$ и $y=0$.
3. Скорость падающего в пустоте тела изменяется по формуле $V=9,8t$. Какой путь пройдет тело за первые 10 с падения?
4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 30 Н.

Вариант 3

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) б) $y=x^2, y=3x-x^2$
2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $x=1, x=4, y-x+4$ и $y=0$.
3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(5t^2-t-1)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой за 8 с от начала движения.
4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,1 м, если для сжатия ее на 0,02 м нужна сила 60 Н.

Вариант 4

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y=x^3, y=0, x=-2, x=2$. б) $y=\frac{5}{x}, y=6-x$
2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-4, y=0$.
3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(2t-4t^2)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,12 м, если для сжатия ее на 0,02 м нужна сила 50 Н.

Вариант 5

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \frac{6}{x}, y = 0, x = 1, x = e$

б) $y = x^2 + 4, y = 2x + 4 - x^2$

2. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi$.

3. Скорость движения точки изменяется по закону $v = (3t^2 + 2t - 1)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой за 5-ую секунду.

4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,2 м, если для сжатия ее на 0,04 м нужна сила 10 Н.

Вариант 6

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = -x^2 + x + 6, y = 0$

б) $y = \frac{3}{x}, y = 4 - x$

2. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $x = 0, x = 3, y = x - 3$ и $y = 0$.

3. Скорость падающего в пустоте тела изменяется по формуле $V = 9,8t$. Какой путь пройдет тело за первые 5 с падения?

4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,06 м, если для сжатия ее на 0,03 м нужна сила 60 Н.

Вариант 7

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 2\cos x, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$

б) $y = x^3 + 2, y = \sqrt{x} + 2$

2. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x, y = 0, x = 0, x = 4$

3. Скорость движения точки изменяется по закону $v = (3t - t^2 + 4)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой за 5с от начала движения.

4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 30 Н.

Вариант 8

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $xy = 4, x = 4, x = 8$

б) $y = 2 + 4x - x^2, y = x^2 - 2x + 2$

2. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры,

ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 2, y = 0$

3. Скорость движения точки изменяется по закону $v = (15t - 5t^2)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,12 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 20 Н.

Вариант 9

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \ln x, x = 5, y = 0$

б) $y = x^3 + 1, y = \sqrt{x} + 1$

2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2=8x$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.
3. Скорость движения точки изменяется по закону $v=(3t^2-2t+4)$ м/с. Найдите путь пройденный точкой за 3-ую секунду.
4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 25 Н.

Вариант 10

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y=6x-x^2, y=0$ б) $y=\frac{1}{4}x^3, y=\sqrt{2x}$
2. Вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y=\sin 2x, y=0, x=0, x=\pi/2$.
3. Скорость падающего в пустоте тела изменяется по формуле $V=9,8t$. Какой путь пройдет тело за первые 12 с падения?
4. Вычислите работу, произведенную при сжатии пружины на 0,07 м, если для сжатия ее на 0,03 м нужна сила 30 Н.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 21

Тема: Вычисление вероятностей случайных событий

Цель работы: применить умения по владению представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Вероятностью события A называется отношение числа случаев, благоприятствующих событию A , к общему числу случаев.

Вероятность события A обозначают числом $P(A)$

m - число случаев, благоприятствующих событию A

n -общее число случаев ($n \sim$) $P(A) = \frac{m}{n}$

Свойства:

1. Для любого события A , $0 \leq P(A) \leq 1$, т.к. $0 \leq m \leq n$.
2. Вероятность достоверного события равна единице (для достоверного события $m=n$).
3. Вероятность невозможного события равна нулю ($m=0$).

Подсчет числа случаев осуществляется по формулам комбинаторики.

Правило сложения вероятностей.

Теорема Вероятность объединения несовместимых событий равна сумме их вероятностей $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

Свойства:

1. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме их вероятностей минус вероятность их совместного появления.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \times B)$$

2. Если события A, A_2, \dots, A_n несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна 1.

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$

3. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Условной вероятностью события A при наличии B называется вероятность события A , вычисленная при условии, что событие B произошло, обозначается $P_{\cdot}(A)$.

События A и B называются независимыми, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. В противном случае события A и B называются зависимыми.

Теорема умножения. Вероятность совместного появления двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого.

$$P(A \times B) = P(A) \times P_{\cdot}(B) = P(B) \times P_{\cdot}(A)$$

Для независимых событий теорема умножения имеет вид:

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B)$$

Объединение событий $A \vee B$ – событие состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих хотя бы одному из событий A и B .

Пересечение событий $A \wedge B$ – событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих обоим событиям A и B .

Содержание работы:

Вариант 1

1. В группе иностранных туристов- 51 человек, среди них два француза. Для посещения маленького музея группу случайным образом делят на три подгруппы, одинаковые по численности. Найдите вероятность того, что французы окажутся в одной группе.
2. В среднем на 1000 аккумуляторов, поступивших в продажу – 7 неисправных. Найдите вероятность того, что один купленный аккумулятор окажется исправным.
3. В некоторой местности утро в мае бывает либо ясным, либо облачным. Наблюдения показали: Если майское утро ясное, то вероятность дождя в течении дня равна 0,6. Вероятность того, что утро в мае будет облачным – 0,4. Найдите вероятность того, что в случайно взятый майский день дождя не будет.

Вариант 2

1. Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два раза промахнулся.
2. Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо - равна 0,05. Покупатель в магазине выбирает одну новую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет плохо.
3. В некоторой местности утро в июле может быть либо ясным, либо пасмурным. Наблюдения показали: Если июльское утро ясное, то вероятность дождя равна 0,1. Если июльское утро пасмурное, то вероятность дождя в течение дня равна 0,5. Вероятность того, что утро в июле будет пасмурным равна 0,2. Найдите вероятность того, что в случайно взятый июльский день дождя не будет.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 22

Тема: Вычисление вероятностей случайных событий

Цель работы: формирование умений решать задачи, используя классическую формулу вероятности; закрепление умений решать задачи, используя определения и формулы разных видов комбинаций без повторений и с повторениями; решать задачи, используя правила комбинаторики.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Справочный материал:

Классическое определение вероятности

Пример 1. Пусть в урне содержится 6 одинаковых шаров, причем 2 из них - красные, 3 - синие и 1 - белый. Какова возможность вынуть наудачу из урны цветной шар? Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается можно. Это число и называется вероятностью события A (появления цветного шара). Таким образом, **вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события.**

Каждый из возможных результатов испытания (в примере 4, испытание состоит в извлечении шара из урны) называется **элементарным исходом**.

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, называются **благоприятствующими** этому событию. В примере 4 благоприятствуют событию A (появление цветного шара) 5 исходов.

События называются **равновозможными**, если есть основания считать, что не одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример 2. Появление того или иного числа очков на брошенном игральном кубике – равновозможные события.

Вероятностью $P(A)$ события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. **Вероятность** $P(A)$ события A определяется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих A ; n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

В примере 4 всего элементарных исходов 6; из них 5 благоприятствуют событию A . Следовательно, вероятность того что взятый шар окажется цветным, равна $P(A) = 5/6$.

Пример 3. Определить вероятность выпадения нечётного числа очков на кости.

Решение. При бросании кости событие A – «выпало нечётное число очков» можно записать как подмножество $\{1, 3, 5\}$ пространства исходов $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (рис. 1).

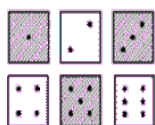


Рис. 1. Пространство исходов при бросании кости

Число всех равновозможных исходов $n = 6$, а число благоприятных событию $A - m = 3$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Пример 4. В урне находится 7 шаров: 2 белых, 4 черных и 1 красный. Вынимается один шар наугад. Какова вероятность того, что вынутый шар будет чёрным?

Решение. Занумеруем шары. Пусть, например, шары с номерами 1 и 2 – белые, с номерами 3, 4, 5 и 6 – чёрные, а красному шару присвоим номер 7. Так как мы можем вынуть только один из семи шаров, то общее число равновозможных исходов равно семи ($n = 7$). Из них 4 исхода – появление шаров с номерами 3, 4, 5 и 6 – приведут к тому, что вынутый шар будет чёрным ($m = 4$). Тем самым, вероятность события A , состоящего в появлении чёрного

шара, равна
$$P(A) = \frac{4}{7}.$$

Вычислите вероятность того, что вынутый шар будет белым.

Пример 5. Вычислить вероятность выпадения в сумме 10 очков при бросании пары костей.

Решение. Рассмотрим все равновозможные исходы в результате бросания двух костей (их число равно 36 – рекомендуем записать в виде таблицы). Выпадение в сумме 10 очков (событие A) возможно в трёх случаях – 4 очка на первой кости и 6 на второй, 5 очков на первой и 5 на второй, 6 очков на первой и 4 на второй. Поэтому вероятность события A (выпадения в сумме 10 очков)

равна
$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Пример 6. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

Решение.

1) Обозначим событие A – «Вытянутый студентом билет состоит из подготовленных им билетов». Для вычисления вероятности появления данного события воспользуемся классическим определением вероятности события,

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

согласно которому вероятность определяется по формуле:

где m – число исходов, при которых появляется событие A ,
 n – общее число элементарных несовместных равновозможных исходов.

2) Определим n . Общее число билетов определяется сочетанием по 2 из 60:

$$n = C_{60}^2 = \frac{60!}{58! \cdot 2!} = \frac{60 \cdot 59}{2} = 1770$$

3) Количество билетов, вопросы которых студент знает, определяется сочетанием по 2 из 50:

$$m = C_{50}^2 = \frac{50!}{48! \cdot 2!} = \frac{50 \cdot 49}{2} = 1225$$

4) Определим вероятность события A :

$$P(A) = \frac{1225}{1770} = 0,69.$$

Ответ: Вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов равна $P(A) = 0,69$. То есть, если будет, например, 100 таких студентов, то 69 из них вытянут билеты, к вопросам которых они подготовлены.

Содержание работы:

Задача 1. В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Задача 2. В коробке лежат 8 зеленых, 7 синих и 15 красных карандашей. Вычислить вероятность того, что взятый наугад карандаш будет, синим или зеленым.

Задача 3. В одной коробке находится 4 белых и 8 черных шаров, а в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой коробки вынули по шару. Вычислить вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Задача 4. В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Задача 5. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Задача 6. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.

Задача 7. Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 23

Тема: Анализ, обработка и графическое представление данных

Цель работы: освоить методику построения, анализа и графического изображения рядов распределения

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Содержание работы:

Задание 1. По приведенным данным постройте ряд распределения предприятий отрасли по проектной мощности.

Исходные данные

№ предприятия	Проектная мощность, тыс. шт.	№ предприятия	Проектная мощность, тыс. шт.	№ предприятия	Проектная мощность, тыс. шт.
1	25,0	10	35,0	19	68,0
2	14,0	11	46,0	20	20,0
3	65,0	12	120,0	21	75,0
4	70,0	13	125,0	22	40,0
5	30,0	14	125,0	23	45,0
6	18,0	15	200,0	24	35,0
7	14,0	16	14,0	25	87,0
8	55,0	17	88,0		
9	40,0	18	118,0		

Для построения ряда распределения необходимо:

1. Произвести группировку варьирующего признака: используя формулу Стерджеса: $n = 1 + 3,322 \lg N$

Определить число групп $n =$

$$h = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{n}$$

2. Определить величину интервала по формуле:

3. Определить границы интервалов:

Группа	Величина интервала
1	
2	
3 и т.д.	

4. Построить ряд распределения, воспользовавшись таблицей.

Ряд распределения предприятий отрасли по проектной мощности.

Проектная мощность, тыс. шт.	Число предприятий	% к итогу
Всего	25	100

Задание 2. Используя показатели ряда распределения в задании 1, постройте гистограмму.

Задание3. По ниже приведенным данным о распределении численности рабочих одной из отраслей промышленности, по тарифным разрядам за год постройте полигон распределения.

Тарифный разряд	1	2	3	4	5	6
Численность рабочих, % к итогу	4,3	12,1	20,6	32,4	24,0	6,6

Задание 4. На основании ряда распределения семей по размеру жилой площади (табл.3), приходящейся на одного человека построить кумуляту и огиву.

Распределение семей по размеру жилой площади, приходящейся на одного человека (цифры условные).

№ п/п	Группы семей по размеру жилой площади, приходящейся на 1 человека	Число семей с данными размерами жилой площади	Накопленное число семей
1.	3-5	10	
2.	5-7	20	
3.	7-9	40	
4.	9-11	30	
5.	11-13	15	
	ВСЕГО	115	

Необходимо помнить, что кумулята и огива как графическое изображение ряда распределения, строятся по накопленным частотам, поэтому перед построением данных графиков необходимо вначале рассчитать накопленные частоты и записать их в таблицу 3, а затем уже строить графики, обозначив оси

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 24

Тема: Анализ, обработка и графическое представление данных

Цель работы: освоить методику построения статистических таблиц и графиков

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия, микрокалькуляторы.

Содержание работы:

Задание 1. Объедините приведенные таблицы о миграции населения Российской Федерации за 2001-2002 гг (тыс. чел.) в одну и дайте ей общий заголовок.

Убыло из города	Всего	В том числе		Убыло из сельской местности	Всего	В том числе	
		Мужчин	женщин			В город	В сельскую местность
В город	5230	2627	2603	Мужчины	3362	2167	1195
В сельскую местность	1759	860	889	Женщины	3473	2197	1276
ИТОГО:				ИТОГО:			

Для объединения таблиц в одну статистическую таблицу используйте форму комбинационной статистической таблицы, подлежащее которой содержит группировку единиц совокупности одновременно по двум и более признакам: каждая из групп, построенная по одному признаку, разбивается, в свою очередь, на подгруппы по другому признаку и т. д.

Задание 2. Оформите в табличном виде следующие данные. Военные расходы ФРГ возросли с 6,1 (1990г) до 31,0 млрд. дол. В 2000г., а Франции соответственно с 5,9 до 27,0 млрд. дол. За тот же период доля ФРГ в общих расходах НАТО увеличилась с 6 до 10%, а доля Франции с 5 до 9%.

При построении статистической таблицы лучше использовать макет таблицы со сложной разработкой сказуемого.

Задание 3. Имеются следующие данные характеризующие динамику развития внешней торговли России (таблица 1).

Таблица 1. Объем внешней торговли России (млрд. дол. в текущих ценах).

Годы	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Оборот	183,3	121,3	97,2	101,4	116,7	135,7	148,1
Экспорт	85,5	66,8	54,2	59,2	66,2	77,8	88,3
Импорт	94,8	54,2	43,0	42,2	50,0	57,9	59,8

Изобразите приведенные в таблице данные при помощи линейной диаграммы (все кривые нанесите на одну диаграмму) и сделайте вывод.

Задание 4. Географическая структура экспорта России характеризуется следующими данными (таблица 2).

Таблица 2. Географическая структура экспорта России, (% к итогу).

Страны	2002	2004
Европа	58,2	53,9
Азия	16,2	16,6
Америка	2,7	7,1
Африка	1,1	0,9
Страны СНГ	21,8	21,5
ИТОГО:	100	100

Постройте секторную диаграмму, отражающую географическую структуру экспорта России.

1. Строим 2 круга одинакового радиуса, для каждого года свой круг.
2. Определяем размер центральных углов по данным о доле группы стран в экспорте России для построения секторов, для этого удельный вес страны в общем экспорте России (%) умножаем на $3,6^0$.

Например: Размер центрального угла для стран Европы:

в 2002г будет равен $58,2 \times 3,6^0 = 209,52^0$ 210^0 ;

в 2004г $53,9 \times 3,6^0 = 194^0$

Таким образом, определяются размеры центральных углов для всех остальных стран.

Размер центрального угла для стран Азии:

в 2002г

в 2004г

Размер центрального угла для стран Америки:

в 2002г

в 2004г

Размер центрального угла для стран Африки:

в 2002г

в 2004г

Размер центрального угла для стран СНГ:

в 2002г

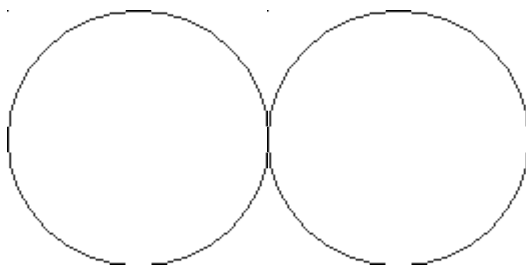
в 2004г

3. После того как определены размеры центральных углов, отмечаем сектора на круге с помощью транспортира.

4. С помощью штриховки секторов, указать какой из них характеризует ту или иную группу стран.

Географическая структура экспорта России

2002 г. 2004 г.



Задание 5. Постройте радиальную диаграмму по данным о производстве шоколада и шоколадных изделий одной из кондитерских фабрик по месяцам года:

месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
тонн	972	886	974	1013	848	929	466	730	947	964	881	920

1. Необходимо начертить круг с радиусом равным среднемесячному показателю, для этого необходимо: а) определить среднемесячный показатель по формуле:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \text{ (тонн)}$$

где, x_i - показатель за каждый месяц.

n – число месяцев в году ($n = 12$).

$$\bar{x} =$$

б) установим масштабную шкалу приняв $1 \text{ см} = 200 \text{ тонн}$.

в) начертим круг с радиусом ? см, согласно установленного масштаба.

2. Весь круг разделить на 12 радиусов (соответственно по числу месяцев в году) каждый из них обозначает месяц.

3. Нумерацию месяцев производить аналогично циферблату часов: январь – в том месте где на часах 1, февраль – 2 и т.д.

4. На каждом радиусе делаются отметки в определенном месте согласно масштабу исходя из данных за соответствующий месяц. Если данные превышают среднемесячный уровень, отметка делается за пределами окружности на продолжении радиуса.

5. Соединить отметки различных месяцев отрезками. Таким образом будет построена радиальная диаграмма.

Сделайте вывод о сезонности производства на кондитерской фабрике.

Информационное обеспечение обучения

Печатные издания:

Основные учебные издания:

1. Березина, Н. А. Высшая математика: учебное пособие / Н. А. Березина. — 2-е изд. — Саратов: Научная книга, 2019. — 158 с. — ISBN 978-5-9758-1888-1. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование: [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/80978>
2. Гончаренко, В.М. Элементы высшей математики: учебник / Гончаренко В.М., Липагина Л.В., Рылов А.А. — Москва: КноРус, 2021. — 363 с. — ISBN 978- 5-406-08264-5. — URL: <https://book.ru/book/939287>
3. Фоминых, Е. И. Математика. Практикум: учебное пособие / Е. И. Фоминых. — 2-е изд. — Минск: Республиканский институт профессионального образования (РИПО), 2019. — 440 с. — ISBN 978-985-503-936-6. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование: [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/94307>

Дополнительные учебные издания:

4. Аналитическая геометрия: практикум для СПО / О. Н. Казакова, О. Н. Конюченко, Т. А. Фомина, С. В. Харитоновна. — Саратов Профобразование, 2020. - 116 с. — ISBN 978-5-4488-0577-6. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование: [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/92122>

Электронно-библиотечная система:

- 5.ЭБС «elibrary», ООО «РУНЭБ»
- 6.ЭБС «IPRbooks», ООО «Ай Пи Ар Медиа»
- 7.ЭБС «Лань», ООО «Издательство Лань»
- 8.ЭБС «PROФобразование»
- 9.ЭБС «Book.ru»